Вариант 4

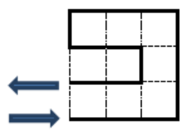
1. Найдите какое-нибудь натуральное число, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна 1024.

2. Решите уравнение $\left(x^2-x+3\right)\left(x^2+5x+9\right)=44.$

3. Докажите, что для любого треугольника с длинами сторон a,b,c и углами α, β, γ (α напротив стороны a, β – напротив b, γ – напротив c) выполняются равенства $a^2+b^2-2ab\cos(60^0-\gamma)=b^2+c^2-2bc\cos(60^0-\alpha)=a^2+c^2-2ab\cos(60^0-\beta).$

4. Две частицы находятся в вершинах правильного 2016-угольника. В начальный момент первая частица находится на расстоянии 63 стороны по часовой стрелке от второй. Затем одновременно они начинают совершать прыжки: вторая – против часовой стрелки через 123 стороны, а первая – по часовой стрелке через 100 сторон. Попадут ли они одновременно в одну вершину и если да, то через сколько прыжков?

5. На плоскости изображён квадрат $n\times n$ клеток. Вершины клеток будем называть узлами. Требуется в этом квадрате уложить трубу (“тёплый пол”) так, чтобы вход был в левом нижнем углу, а выход – в соседнем узле, и при этом труба прошла бы ровно один раз через каждый узел. Трубу разрешается укладывать только по границам клеток. На рисунке изображён пример укладки трубы в квадрате 3x3. Докажите, что уложить трубу возможно при любом нечётном значении n и невозможно ни при каком чётном n.



6. Первый спортсмен начинает движение из пункта A в пункт B. Одновременно с ним, держа в руке эстафетную палочку, из этого же пункта A стартует второй спортсмен и совершает челночный бег между пунктами A и B со скоростью, в 10 раз большей, чем скорость первого спортсмена (т.е., добежав до B, второй спортсмен тут же разворачивается и бежит в A, оттуда снова в B и т.д.). При каждой встрече спортсмен, владеющий эстафетной палочкой, передает ее другому спортсмену. Найти путь, который будет проделан эстафетной палочкой к тому моменту, когда первый спортсмен окажется в пункте B, если расстояние между пунктами A и B равно S.

7. Пусть x – действительное число. Обозначим символом $\|x\|$ расстояние на числовой прямой от x до ближайшего целого числа. (Например, $\|3,7\|=0,3.$) Докажите, что найдётся натуральное число k такое, что 1) $k\le 999$ и 2) $\|k\cdot\sqrt{6}\|<\frac{1}{1000}$.

8. Найдите все пары натуральных чисел (x, y), удовлетворяющих равенству:

$$x^2+y^2=200000.$$